**Eulers metode i sammenligning med eksakt løsning**

Vi har lige vist hvorledes en førsteordensdifferentialligning kan løses numerisk ved brug af Eulers metode. Vi har desuden set hvordan forskellige værdier af h ændrer den numeriske løsning og den tilhørende grafiske repræsentation af funktionen. Det ville også være interessant at sammenligne den numeriske løsning med den eksakte løsning af samme differentialligning. Både for at vurdere om Eulers metode overhovedet er brugbar efter og for at finde ud af hvad der sker med den numeriske løsning i forhold til at den eksakte, når h varieres.

Den første differentialligning vi vil undersøge er denne

y' = 2y, hvor y(0)

Til at løse denne numerisk bruges Eulers metode. Til at starte med forsøges med h = 0,2. Altså ser ligningssættet således ud

yn+1 = yn + 0,1 \* 2y

xn+1 = xn + 0,1

Den eksakte løsning ser således ud

y = e2x

Denne skal bruges som kontrol for Eulers metode.

Når startværdien indsættes i den numeriske løsning, og der laves flere iterationer vil der fremkomme et datasæt som er den numeriske løsning til differentialligningen i intervallet [x0;xn+1]. I nedenstående eksempel er ligningen løst numerisk i intervallet [0;2].

På grafen ses den eksakte løsning grafisk repræsenteret af den røde linje og den numeriske løsning med Eulers metode som den blå. Desuden ses de enkelte skridt i den numeriske løsning som prikker på linjen. Det er tydeligt at Eulers metode afviger gradvist mere og mere, jo større x bliver.

Afvigelsen kan beregnes og repræsenteres som procentvis afvigelse fra den eksakte løsning. Dette er simpelt og gøres ved brug af en værdi fra den eksakte løsning og fra den numeriske løsning fra samme x-koordinat. Altså

Afvigelse = 100 \* |Eulers - eksakt| / eksakt

Afvigelse = 100 \* |28,93 - 54,59815003| / 54,59815003

= **47%**

Dette er en meget stor afvigelse og endda ved en meget lav x-værdi. For at øge præcisionen af den numeriske løsning mindskes h.

Denne gang forsøges med h = 0,02. Her forventes en bedre tilnærmelse af den eksakte løsning.

yn+1 = yn + 0,02 \* 2y

xn+1 = xn + 0,02

Grafen ser således ud

Denne gang, hvor der er taget væsentligt flere skridt, ligger grafen for den numeriske løsning langt tættere op ad den eksakte løsnings graf. Altså stemmer det overens med vores teori omkring variation af h. Som ovenfor vil vi beregne en tilsvarende men forhåbentlig mindre afvigelse fra det eksakte resultat.

**Afvigelse** = **7,5%**

Som forventet er afvigelsen mindre ved en skridtlængde på 0,02 end ved en på 0,2. Det er dog stadig en upræcis approksimation, så der forsøges med h = 0,002.

yn+1 = yn + 0,002 \* 2y

xn+1 = xn + 0,002

**Afvigelse** = **0,8%**

Afvigelsen er nu under 1%, hvilket er en udmærket tilnærmelse. Det er værd at bemærke at når x bliver større, så skal der til stadighed mindre og mindre skridtlængde h til for at bevare en acceptabel præcision.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | h = 0,1 | h = 0,01 | h = 0,001 |
| x = 1 | 16,20 | 1,95 | 0,20 |
| x = 2 | 29,78 | 3,87 | 0,40 |
| x = 3 | 41,16 | 5,75 | 0,60 |
| x = 4 | 50,69 | 7,59 | 0,80 |
| x = 5 | 58,68 | 9,40 | 0,99 |